Corrigé

1. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1+2} = \frac{n+2}{n+3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n^2+4n+4-(n^2+4n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Comme $n \geq 0$ alors $n+2 \geq 2$ et $n+3 \geq 3$, $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite est donc croissante.

2. On a $u_n > 0$ pour tout entier naturel, $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{n+1}$$ et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} = \frac{3^{n+1} \times n}{n(n+1)} - \frac{3^n(n+1)}{n(n+1)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3^n \times 3 \times n - 3^n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{3^n\,(3n-(n+1))}{n(n+1)} = \frac{3^n\,(3n-n-1))}{n(n+1)} = \frac{3^n\,(2n-1))}{n(n+1)}$$

Or $3^n > 0$ et comme $n \geq 1$, $n(n+1) > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $2n-1$.
Comme $n > 1$, on a donc $2n > 2$ et donc $2n - 1 > 1 > 0$. D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est donc croissante.

3. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 12 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 12 = n^2 - n + 10.$$

$$u_{n+1} - u_n = n^2 - n + 10 - (n^2 - 3n + 12) = 2n - 2$$

On a $2n - 2 > 0$ si $2n > 2 \iff n > 1$. La suite est donc croissante à partir de $n = 1$.

4. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Les termes de la suite sont donc strictement positifs.

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

D'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \times n(n+1) = \dfrac{n}{n+2}$.

Or $n + 2 > n$ donc $\dfrac{n}{n+2} < 1$.

Par conséquent, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$ et $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
La suite est donc décroissante.